

MAONS, ALTARS I VERSOS: ELS SINGULARS MÈTODES DE TRANSMISSIÓ DELS CONEIXEMENTS MATEMÀTICS I ASTRONÒMICS A L'ANTIGA ÍNDIA

CARLES PUIG-PLA;¹ IOLANDA GUEVARA CASANOVA²

¹ CENTRE DE RECERCA PER A LA HISTÒRIA DE LA TÈCNICA. UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA.

² DEPARTAMENT D'ENSENYAMENT I UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA.

Paraules clau: *matemàtiques a l'antiga Índia, cultura d'Harappa, Sulbasutras, Siddhantes, Aryabhata*

Bricks, Altars and Verses. The Singular Methods for the Transmission of Mathematical and Astronomical Knowledge in Ancient India

Summary: *In the Indian subcontinent the civilization of the Indus, one of the oldest civilizations, was developed. From the beginning, they had knowledge of basic geometry and metrology and, over time, important achievements in astronomy and maths were reached. It was the so-called classical period (400-1200) with such prominent personalities as Aryabhata, Brahmagupta or Bhaskara II. This long development happened through different stages in which the transmission and learning of knowledge was done using singular mechanisms. They involved aspects related to commerce and technology (civilization of the Indus 2500-1800 BC), ritualistic, religious and linguistic structures (Vedic age 1500-500 BC), non-theist cosmological ideas (Jainism 500-200 BC) and Sanskrit astronomical texts (siddhantas) written in cryptic verses (ca. 4th century onwards).*

Key words: *Mathematics in ancient India, culture of Harappa, Sulbasutras, Siddhantas, Aryabhata.*

Maons per a construir ciutats; pesos i mesures per a comerciar

Una de les civilitzacions més antigues de la humanitat, la civilització de l'Indus, es va desenvolupar al nord-oest del subcontinent indi. Sovint ens hi referim també

com a la civilització o cultura d'Harappa, tot destacant la primera i principal ciutat que va ser excavada a la dècada de 1920, Harappa. Aquesta civilització, els orígens de la qual es poden remuntar al 7000 aC o al 6000 aC (National Geographic, 2012), va abastar dos mil·lennis, del 3200 aC al 1300 aC, tot i que des del punt de vista dels avenços tecnològics el seu màxim desenvolupament va tenir lloc entre el 2600-2500 aC i el 1900-1800 aC. Posteriorment es va produir un declivi, les raons del qual no han estat del tot explicades, quan les tecnologies clau van quedar fora d'ús i la població va anar abandonant progressivament els nuclis urbans (Khan & Lemmen, 2014).

Diferents jaciments arqueològics (Mehrgarh, Harappa, Mohenjo-Daro, Dholavira, Lothal,...) mostren una societat organitzada amb un notable grau d'urbanització. Aquesta civilització va planificar i construir ciutats amb edificis de maó (fig. 1). Tenien infraestructures per a conservar l'aigua, disposaven de canals, embassaments, sistemes de drenatge i clavegueram (National Geographic, 2014) i van tenir, naturalment, coneixements matemàtics.

Els maons representen una gran part del material arqueològic que aquesta civilització ens ha deixat i constitueixen una característica seva que ha permès conèixer la distribució de les seves ciutats i nuclis de població en l'espai geogràfic. Inicialment, van usar maons de fang, els quals ja es troben el 7000 aC a l'assentament arqueològic de Mehrgarh, a la província de Balutxistan, al Pakistan. Posteriorment van usar els maons cuits, que apareixen a Jalilpur, cap al 2800 aC (Khan & Lemmen, 2014: 3).

La complexitat d'una civilització com aquesta va comportar l'establiment de mesures comunes de longitud i de pes per a la recaptació d'impostos i l'activitat comercial. L'intercanvi de mercaderies no només va tenir lloc entre les ciutats de la vall de l'Indus, sinó fins i tot amb Mesopotàmia. Des de la ciutat portuària de Lothal, a la desembocadura de l'Indus, mercaders d'Harappa i Mohenjo-Daro van comerciar amb els sumeris entre el 2300 aC i el 2000 aC.

L'emergència d'una metrologia lligada a la tecnologia i al comerç es posa de manifest en escales i instruments per a mesurar. Un fragment de petxina de 66,2 mm de longitud dividida en deu parts iguals per nou línies paral·leles a una distància mitjana de 6,7 mm, té dues línies assenyalades de forma diferent; la distància entre elles s'ha denominat «polzada de l'Indus» (33,5 mm) i s'ha destacat la seva equivalència amb el doble del *sushi*, unitat de longitud sumèria (Joseph, 1996: 304-305).

La cultura Harappa va utilitzar un sistema estandarditzat de pesos basats en les proporcions: 1/20, 1/10, 1/5, 1/2, 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200 i 500. A les excavacions de Lothal s'ha trobat una gran quantitat de pesos en forma d'hexàedres; si es pren la peça més freqüent com a unitat (27,6 grams), llavors n'hi ha que corresponen a 0,05, 0,1, 0,2, 0,5, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200 i 500 de la mateixa. Existeixen també pesos amb altres formes geomètriques regulars (barrils, cons, cilindres).

El fet de tenir un sistema estandarditzat de pesos i mesures, amb múltiples i divisors d'una determinada unitat, posa en evidència l'ús d'una matemàtica pràctica i mostra la utilització de càlculs matemàtics i el coneixement de nocions de geometria bàsica.

Una de les característiques de les construccions que es van fer a Harappa va ser una avançada tecnologia per a fabricar maons cuits al forn i l'establiment d'estàndards en les proporcions de les mesures d'aquests maons que van usar-se durant molt de temps. Tot i que s'han identificat fins a quinze mides diferents de maons, la raó estàndard de les tres dimensions—longitud, amplada i gruix—és sempre 4:2:1, denominada «proporció de l'Indus». Es van utilitzar motlles estandarditzats des del 4000-3600 aC.



FIGURA 1. Ruïnes arqueològiques de Mohenjo-Daro

L'estudi de maons d'Harappa, Mohenjo-Daro i Lothal mostra que certs maons de mides diferents tenen dimensions que són múltiples enters de les respectives unitats de longitud trobades en cada ciutat. Tot i que la proporció 4:2:1 va ser la típica per als grans maons a Harappa, algunes ciutats van fer servir relacions diferents, com ara Kalibangan que va usar la relació 3:2:1. Més enllà dels motlles, els estàndards es van preservar en la tradició dels artesans i en les normes socials (Khan & Lemmen, 2014: 5).

No s'han desxifrat els símbols i inscripcions de la civilització de la vall de l'Indus, però la supervivència d'objectes com ara els pesos o els maons estandarditzats constitueix una font primària que «parla» de la transmissió de coneixements matemàtics. La relació entre les formes dels maons i les unitats de longitud, entre tecnologia i metrologia, van tornar a aparèixer a l'antiga Índia segles més tard, durant el període vàedic, en la construcció d'altars.

Altars per al ritualisme vàedic

Entre el 1900 aC i el 1300 aC es va produir un declivi, les raons del qual estan encara per explicar. Durant aquest període les tecnologies clau van quedar fora d'ús i, progressivament, la població va anar abandonant els nuclis urbans.

Amb l'arribada dels aris procedents del nord, s'inicia l'època vàedica (1500 aC - 500 aC). El pensament vàedic es va expressar a través de la llengua sànscrita. L'hinduisme i el sànscrit van estar íntimament relacionats (Deva Sthanam, 2014). De fet, el sànscrit va evolucionar i va permetre la transmissió del discurs religiós en els *Vedes* (llibres sagrats dels antics indoaris) que incloïen pràctiques de

contingut matemàtic. Les característiques pròpies del sànscrit van facilitar l'expressió dels raonaments matemàtics i van sustentar la tradició lingüística de representar els nombres mitjançant paraules (Joseph, 1996: 301).

Entre els *Vedes*¹ hi ha els *Brahmanes*, que són manuals pràctics escrits per als bramans, sacerdots que realitzaven els sacrificis i els ritus sagrats. Les fonts més importants per a estudiar les matemàtiques vèdiques es troben en els apèndixs dels *Vedes* (*Vedanges*) que subministraven dades auxiliars per a la comprensió dels *Vedes*. N'hi ha de dedicats a l'astronomia –enfocada a seleccionar les dates adequades per a realitzar els ritus i orientar bé els altars i les pregàries– i de relacionats amb les regles dels rituals i cerimònies (*kalpa*). Són els que concentren les fonts més importants de les matemàtiques del període vèdic.

Les dades es trobaven en forma de *sutres* (regles expressades en forma d'aforismes i sovint en estil poètic) per a captar l'essència d'una argumentació o resultat. Això va ajudar a preservar els continguts. S'evitaven els verbs i els noms compostos llargs per facilitar-ne la memorització i fer estalvi de material escrit.

Els *Kalpasutres* (regles dels rituals i cerimònies) incloïen els *Sulbasutres*, textos que es refereixen a les mesures per a la construcció dels altars. La major part del que es coneix de la geometria vèdica prové dels *Sulbasutres*, escrits entre el 800 aC i el 200 aC.

Els *Sulbasutres* van sorgir per la necessitat de recollir per escrit l'orientació, la forma i l'àrea dels altars, segons estava escrit en els llibres sagrats vèdics. Així, per a l'orientació van desenvolupar l'astronomia i per a les formes i les àrees, la geometria. Eren manuals pràctics amb instruccions concretes que portaven implícits resultats i teoremes geomètrics que ja no es qüestionaven. Descriuen, per exemple, la construcció d'un altar amb una forma determinada; la fusió de dos quadrats per construir un quadrat d'àrea igual a la suma dels dos; la transformació d'un rectangle en un quadrat de la mateixa àrea, o la conversió d'un cercle en un quadrat de «la mateixa» àrea o viceversa.

Els autors dels *Sulbasutres* coneixien resultats matemàtics com el teorema de Pitàgores, tal i com es posa de manifest quan Baudhayana (ca. 800 aC) va escriure: «La soga que s'estén al llarg de la diagonal d'un quadrat produeix una àrea que és el doble de la del quadrat original», o quan Katyayana (ca. 200 aC) indicava: «La soga que s'estén sobre la diagonal d'un rectangle produeix una àrea que és la que donen els costats vertical i horitzontal junts» (Puig-Pla *et al.*, 2011).

Pel que fa a la construcció dels altars vèdics, aquests es realitzaven amb maons de diverses mides i havien de tenir unes proporcions molt precises. Per als ritus domèstics podien ser de forma quadrada o circular, però per als ritus públics eren més elaborats, per exemple en forma d'au, com ara un falcó en el moment d'emprendre el vol (fig. 2), tot utilitzant maons amb cares en forma de rectangles, trapezis, triangles...

Durant l'època vèdica, el ritualisme religiós i les estructures lingüístiques del sànscrit van ser els principals vehicles de transmissió dels coneixements astronòmics i geomètrics.

Cosmologia no teista del jainisme (ca. 500-200 aC)

Si durant el període dels bramans les matemàtiques van servir per a l'objectiu principal dels rituals, l'auge del budisme i el jainisme va representar una rebel·lió contra els rituals i els sacrificis de les

1. Els *Vedes* s'estudien distribuïts en quatre èpoques segons les seves datacions: *Samhites* (ca. 1000 aC), *Brahmanes* (ca. 800 aC), *Aranyakes* (ca. 700 aC) i *Upanishads* (ca. 600-500 aC).

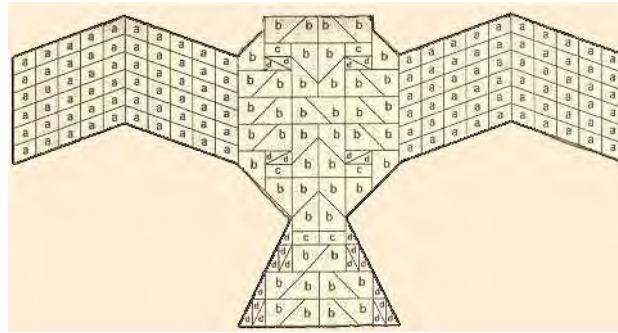


FIGURA 2. Altar vèdic amb la imatge d'un falcó

religions bramàniques. Des del punt de vista de la ciència, els budistes semblen haver-se especialitzat en medicina mentre que els jaines ho van fer en matemàtiques. De fet, a Vardhamana Mahavira, considerat el fundador del jainisme, se l'associa amb un matemàtic (Agrawal, s. d.).

El mèrit de donar a les matemàtiques la forma d'una disciplina abstracta va correspondre als jaines, tot i que les fonts d'informació sobre les seves matemàtiques són escasses i poc estudiades.

Les idees cosmològiques no teistes del jainisme on el temps és etern i sense forma, el món és infinit i increat (sempre ha existit) i l'espai ho envaeix tot i no té forma, semblen haver estat un factor motivador del desenvolupament de les idees sobre l'infinit matemàtic.² Els jaines van interessar-se per enumerar els nombres molt grans i en el text *Anuyoga Dwara sutra* (s. II o I aC) deien: «encara no s'ha aconseguit el nombre més alt enumerable» (O'Connor & Roberston, 2000).

Versos per a l'astronomia matemàtica

El període àlgid de l'astronomia i les matemàtiques índies va arribar a l'època clàssica (400-1200), període en el qual apareixen matemàtics i astrònoms molt destacats com Aryabhata (s. v - s. vi), Brahmagupta (s. vii) o Bhaskara II (s. xii) (Guevara & Puig, 2017).

És a l'inici d'aquest període, cap a la meitat del primer mil·lenni de la nostra era, quan hi va haver una notable activitat matemàtica a l'Índia que es va reflectir en un augment significatiu del nombre de referències a textos d'astronomia, els *siddhantes*, si bé pocs d'ells han sobreviscut.

El *siddhanta* més antic preservat és l'*Aryabhatiya* (499) escrit per Aryabhata (476 - ca. 550). El capítol segon està dedicat a les matemàtiques (*ganita* o càlculs) i està constituït per 33 versos (fig. 3) en una mètrica sànscrita anomenada *arya* (Plofker, 2007: 399). Bhaskara I (ca. 600 - ca. 680) va escriure el comentari més antic d'aquesta obra, l'*Aryabhatiyabhasya* (629).

Els *siddhantes* eren tractats d'astronomia matemàtica, feien càlculs de temps i predeien localitzacions de fenòmens celestes, subministraven procediments per als càlculs astronòmics i també instruïen en el coneixement matemàtic general (operacions aritmètiques bàsiques, càlculs d'interessos sobre préstecs, regles per a calcular àrees, volums o sumes de sèries, etc.).

2. La cosmologia dels jaines contemplava un període de temps de 2588 anys, és a dir: 1013 065324 433836 171511 818326 096474 890383 898005 918563 696288 002277 756507 034036 354527 929615 978746 851512 277392 062160 962106 733983 191180 520452 956027 069051 297354 415786 421338 721071 661056 anys. D'altra banda, la matemàtica dels jaines va reconèixer cinc tipus diferents d'infinit: infinit en una direcció, infinit en dues direccions, infinit en l'àrea, infinit a tot arreu i infinit perpètuament.

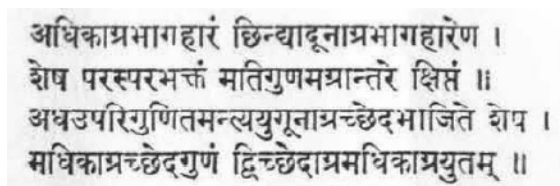


FIGURA 3. Versos sàncrits de l'Aryabhatiya

Un dels *siddhantes* anteriors al d'Aryabhata, és el *Surya Siddhanta*.³ Els seus continguts estaven escrits, segons la tradició clàssica de la poesia índia d'expressar idees complexes líricament, amb un compàs de rima en forma d'un *shloka*, una categoria d'estrofa de la mètrica índia (la mètrica més comuna del s. IV). De manera que el mètode utilitzat consistia a expressar els continguts (astronòmics i matemàtics) en forma de versos.

Aquesta forma d'enregistrar els sabers tenia l'avantatge que resultava més fàcil de recordar, transmetre i preservar el coneixement. Però també presentava problemes ja que els nombres no tenien sinònims de rima. Calien regles addicionals (creatives) que s'havien de saber interpretar; s'utilitzava un llenguatge simbòlic amb doble sentit que un lector competent sabia interpretar. Per exemple, en lloc del «nombre u» (1), s'usava una paraula, *rupa*, que significava Lluna, perquè només hi ha una Lluna o també *bhumi*, Terra, pel mateix motiu; el dos (2) podia ser *yama* (dues vegades) o *kara* (mans), etc. (Joseph, 1996: 330; Ifrah, 1997: 926-930).

El text transmetia en forma poètica els continguts (taules, passos per a calcular òrbites complexes, predicció d'eclipsis, etc.). Aquest enfocament críptic ofería una major flexibilitat per a la construcció poètica. El *Surya Siddhanta* i, en general, els *siddhantes* consistien així en regles críptiques escrites en versos sàncrits.

Eren compendis d'astronomia fàcils de recordar, transmetre i utilitzar com a referència o ajuda per a la persona experimentada, que no pretenien oferir comentaris, explicacions o demostracions. Per això apareixerien, posteriorment, comentaristes dels *siddhantes* que ajudaven a entendre els textos.

El sistema de numeració alfanumèric utilitzat per Aryabhata permet fer-nos una idea de la complexitat de les regles críptiques en la presentació dels continguts. En els seus versos va assignar nombres concrets a fonemes específics del sàncrit. Així, les 25 consonants *varga* (lletres «normals») es corresponien als nombres de l'1 al 25; les 8 consonants *avarga* (lletres «variants») s'associaven als nombres 30, 40, etc. fins al 100; les 9 vocals representaven les potències parells de 10 (1, 10², 10⁴..., fins a 10¹⁶) i si aquestes vocals seguien a una consonant *avarga*, llavors expressaven les potències senars (10, 10³..., fins a 10¹⁷).

Consonants i vocals es podien combinar formant nombres. D'aquesta manera, per exemple, Aryabhata expressava paràmetres astronòmics a la seva obra mitjançant una mena d'argot estrany, inintel·ligible si no es coneixia el seu sistema alfanumèric, quan per exemple escrivia: «Les revolucions del Sol en un *mahayuga* [un període cosmològic de temps] són *khyu-ghr*, Lluna *ca-ya-gi-yi-nu-suchlr*, Terra *ni-si-nl-skhr*, cap a l'est». Versos que es tradueixen, usant el particular sistema d'Aryabhata, com: «el nombre de revolucions del Sol en un *mahayuga* és de 4.320.000 anys, el de la Lluna,

3. L'astrònom i matemàtic indi Varahamihira (ca. 505-587) va escriure una obra, el *Panchasiddhantika*, on subministrava informació sobre textos indis més antics, que actualment estan perduts, en particular sobre el *Surya-siddhanta* o *siddhanta del Sol*.

57.753.336 anys, i el de [rotacions diàries de] la Terra en direcció est, de 1.582.237.500» [rotació axial de la Terra]⁴ (Plofker, 2009: 75; Dutta, 2006).

Consideracions finals

Darrere la fabricació d'un maó estandarditzat, les normes de construcció d'un altar o la redacció de versos hi ha un seguit de coneixements matemàtics que, de forma progressiva i cada cop més sofisticada, es van anar transmetent entre els antics habitants del subcontinent indi.

Una peça en forma d'hexàedre, un maó de fang cuit, un altar en forma d'au, o un vers críptic escrit en sànscrit van esdevenir objectes de la cultura material de les matemàtiques i van constituir-se en singulars mitjans de transmissió de coneixements d'aquesta ciència a l'antiga Índia.

4. Aryabhata, tot i que potser és poc conegut, va plantejar la idea de la rotació de la Terra mentre els estels es mantenien fixos.

Referències bibliogràfiques

- AGRAWAL, D. P. (s. d.), *Ancient Jaina Mathematics: an Introduction*, [en línia] <https://www.infinityfoundation.com/mandala/t_es/t_es_agraw_jaina_frameset.htm> [Darrer accés: 22/12/17].
- DEVA STHANAM (2014), *The importance of Sanskrit to Hinduism*, [en línia] <<http://sanskrit.org/the-importance-of-sanskrit-to-hinduism-2/>> [Darrer accés: 15/11/17].
- DUTTA, A. K. (2006), «Aryabhata and Axial Rotation of Earth - Khagola (The Celestial Sphere)», *Resonance*, 11, (3), 51-68; (4), 56-74; (5), 58-72.
- KHAN, A.; LEMMEN, C. (2014), *Bricks and urbanism in the Indus Civilization*, [en línia] <<http://arxiv.org/pdf/1303.1426.pdf>> [Darrer accés: 16/02/18].
- GUEVARA, I.; PUIG, C. (2017), *Brahmagupta. El àlgebra de las estrellas*, Barcelona, RBA.
- IFRAH, G. (1997), *Historia universal de las cifras*, Madrid, Espasa-Calpe.
- JOSEPH, G. G., (1996), *La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas*, Madrid, Editorial Pirámide.
- NATIONAL GEOGRAPHIC (2012), *La civilización del valle del Indo es más antigua que la egipcia y la babilónica* [en línia] <http://www.nationalgeographic.com/es/historia/actualidad/la-civilizacion-del-valle-del-indo-es-mas-antigua-que-la-egipcia-y-la-babilonica_6828> [Darrer accés: 28/01/17].
- NATIONAL GEOGRAPHIC (2014), *La cultura del valle del Indo*, [en línia] <http://www.nationalgeographic.com.es/historia/grandes-reportajes/la-cultura-del-valle-del-indo_8008/> [Darrer accés: 25/01/17].
- O'CONNOR, J. J.; ROBERSTON, E. F. (2000), *Jaina mathematics*. [en línia] <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Jaina_mathematics.html> [Darrer accés: 16/11/17].
- PLOFKER, K. (2007), «Mathematics in India». A: KATZ, V. (ed.), *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: a sourcebook*, Princeton and Oxford, Princeton University Press, 385- 514.
- PLOFKER, K. (2009), *Mathematics in India*, Princeton and Oxford, Princeton University Press.
- PUIG-PLA, C.; GUEVARA, I.; ROMERO, F.; MASSA, M. R. (2011), «La trigonometria a la matemàtica de l'Antiga Índia. Algunes idees per treballar a l'aula». A: GRAPÍ, P.; MASSA, M. R. (ed.), *Actes de la VI Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament «Antoni Quintana Marí»*, Barcelona, Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica - Institut d'Estudis Catalans, 53-60.